

L'emprunt indivis - généralités

Les modalités de calcul d'un échéancier de remboursement d'un emprunt indivis forment un thème d'étude des outils de gestion en BTS HR (partie mathématiques financières) aux interconnexions fréquentes avec les réflexions dans le domaine de la gestion financière. Il est en effet courant, notamment dans l'option A, de recourir à des calculs financiers pour élaborer et analyser des situations financières.

Aborder cet enseignement face à un public d'étudiants aux origines variées (bacheliers technologiques, bacheliers généraux et notamment des filières littéraires) amène inévitablement à s'interroger sur la manière de capter leur intérêt, certains redécouvrent (ou découvrent) des notions mathématiques qu'ils n'arrivent pas à apprivoiser, des acquisitions fondamentales n'ayant manifestement pas été réalisées (par exemple, les propriétés de manipulation des puissances), alors que d'autres voient un enchaînement plus ou moins connu de notions (et de formules) qu'ils survolent sans éprouver le besoin d'approfondir.

Comment alors sortir de cette difficulté ?

La démarche que j'ai envisagée consiste à observer ce qui constitue normalement l'aboutissement du cours (un échéancier de remboursement d'emprunt), de s'interroger sur les relations qui lient les calculs présentés et de conceptualiser. Finalement, c'est une démarche à rebrousse-poil, démarche qui doit permettre :

- de rendre accessible (en partant du concret) des êtres mathématiques et propriétés à ceux qui sont en difficulté,
- de découvrir sous un jour nouveau, par un processus d'observation et d'analyse, les acquisitions antérieures.

Cette contribution livre deux outils que j'ai mis au point pour générer des échéanciers de remboursement d'emprunt. Ils permettent d'afficher par l'intermédiaire du vidéoprojecteur des échéanciers à partir desquels est mise en œuvre la démarche indiquée plus haut (et de faire de nombreuses simulations).

Les outils fournis – précautions d'utilisation

Ces classeurs ont été construits pour un **usage personnel**. Je les propose **en l'état**, code Visual Basic non protégé, afin que chacun puisse en prendre connaissance et éventuellement les modifier et/ou les améliorer.

Ces classeurs ont été mis au point dans Excel, version 2000, et testés également dans les versions ultérieures jusqu'à Excel version 2007. Normalement, ils fonctionnent sans difficultés dans les versions 2003 et 2007.

Pour en utiliser toutes les potentialités, il est impératif d'activer les macros. Le code Visual Basic est ici inoffensif et vous pouvez le faire sans crainte.

➤ Dans Excel, version 2003 :

Lors de la première ouverture d'un fichier contenant du code Visual Basic, un message de sécurité peut apparaître. Ignorez-le.

Si aucune barre d'outils intitulée « Série chronologique » n'apparaît, soit flottante sur la feuille, soit en liste dans « Affichage », « Barres d'outils », il convient de modifier le niveau de sécurité par défaut : Dans le menu

« Outils », sélectionnez « Macros », puis « Sécurité ». Cochez temporairement « Niveau de sécurité faible », puis validez.

Fermez le fichier ouvert, puis rouvrez-le. Une barre d'outils flottante doit apparaître.

➤ **Dans Excel, version 2007 :**

A l'ouverture du classeur, un avertissement de sécurité indique que du contenu actif est désactivé. Il est nécessaire, en cliquant sur le bouton « Options » d'activer le contenu. Cela permet d'obtenir, dans la barre de menu, une entrée « Compléments » qui donne accès à un menu supplémentaire dans le ruban d'Excel.

Je propose ces classeurs à tous ceux qui veulent les utiliser et/ou les modifier **dans le cadre de leur travail personnel**.

Je les ai construits pour réaliser des échéanciers de remboursement d'emprunt :

- pouvant être projetés sur écran,
- permettant de mettre en œuvre une démarche d'observation et d'analyse.

Mise en œuvre de la démarche – Illustration

Je propose l'illustration page 3 (d'autres peuvent être réalisées) pour mettre en scène les outils proposés dans le cadre de la démarche suggérée. Il s'agit de partir d'un échéancier de remboursement d'un emprunt indivis et de répondre à un ensemble de questions ordonnées et classées en deux groupes : découverte et approfondissement.

L'illustration doit permettre d'aborder les notions et formules suivantes :

- différence entre emprunt indivis et obligataire,
- échéances constantes, amortissement constant, emprunt in fine,
- taux d'intérêt annuel et taux périodique infra annuel,
- formules de calcul d'un taux périodique : taux proportionnel et taux équivalent,
- formule de calcul de l'échéance constante.

Les questions d'approfondissement ne sont pas impératives. Néanmoins, elles permettent de renforcer la compréhension des notions et mécanismes financiers.

Afin d'être explicite, quelques commentaires sont présentés en pages 4, 5 et 6.

Gilles Fréchet
Lycée Jean DROUANT
20, rue Médéric
75017 PARIS
gilles.frechet@ac-paris.fr

Les secrets du remboursement d'un emprunt indivis par échéances constantes

EMPRUNT INDIVIS - TABLEAU D'AMORTISSEMENT					
Type d'emprunt =		Emprunt à échéances constantes			
Capital emprunté =		45000,00	euros	Taux périodique =	0,024695
Taux d'intérêt annuel (%) =		5,00	Semestrialité =		4378,82
Durée de l'emprunt (années) =		6	Taux d'intérêt périodique (arrondi) =		6
Périodicité de remboursement =		Semestrielle	Calculs arrondis à 2 décimales		
Rang	Montant dû en début	Intérêt	Amortissement	Semestrialité	Montant dû en fin
	de semestre			prioritaire	de semestre
1	45000,00	1111,28	3267,54	4378,82	41732,46
2	41732,46	1030,58	3348,24	4378,82	38384,22
3	38384,22	947,90	3430,92	4378,82	34953,30
4	34953,30	863,17	3515,65	4378,82	31437,65
5	31437,65	776,35	3602,47	4378,82	27835,18
6	27835,18	687,39	3691,43	4378,82	24143,75
7	24143,75	596,23	3782,59	4378,82	20361,16
8	20361,16	502,82	3876,00	4378,82	16485,16
9	16485,16	407,10	3971,72	4378,82	12513,44
10	12513,44	309,02	4069,80	4378,82	8443,64
11	8443,64	208,52	4170,30	4378,82	4273,34
12	4273,34	105,53	4273,29	4378,82	0,05

Observation – analyse – questions - réponses

→ Découverte :

- 1) Que signifie l'expression « Emprunt indivis » ?
- 2) Quelles sont les caractéristiques de cet emprunt (montant, durée, périodicité, taux) ?
- 3) Que signifie l'expression « échéances constantes ». Illustrez à partir de l'exemple.
- 4) Qu'est-ce que le taux périodique. Comment est-il calculé ?
- 5) Comment calculer le montant de l'échéance constante (semestrialité) ?

→ Approfondissement :

- 6) Les amortissements sont liés par une relation caractéristique. Ils sont en progression géométrique. Illustrez par le calcul.
- 7) Quelle est la dette restant due après le paiement de l'échéance de rang 6 ? Comment obtenir le montant de cette dette lorsqu'on ne dispose pas de l'échéancier ?
- 8) Le montant de l'emprunt et le 1^{er} amortissement sont liés par une relation, laquelle sachant que dans tout emprunt, la somme des amortissements permet de rembourser intégralement le montant emprunté ?
- 9) Quelle est la relation entre l'amortissement et l'annuité dans le cas de la 1^{ère} annuité ?
- 10) Quelle est la relation entre l'amortissement et l'annuité dans le cas de la dernière annuité ?

Quelques commentaires

Remarque de vocabulaire :

Le terme « remboursement » est privilégié. Action de rembourser, il est généralement employé dans des expressions comme « remboursement d'une dette », « remboursement d'un emprunt », « remboursement de frais engagés ».

Le terme « échéance » est préféré à celui d'annuité même si il est courant d'employer ce mot au sens générique d'échéance. On parlera donc d'échéance, celle-ci pouvant être de périodicité annuelle (annuité), mensuelle (mensualité), etc.

Enfin, dans les développements qui suivent, on ne pourra pas faire l'économie de distinguer la notion d'égalité (qui est de même quantité à la même date) et la notion d'équivalence (au sens financier, des quantités différentes à des dates différentes qui ont la même valeur).

➔ Découverte :

1) Que signifie l'expression « Emprunt indivis » ?

On peut ici, par exemple, faire le distinguo entre emprunt indivis et emprunt obligataire.

2) Quelles sont les caractéristiques de cet emprunt (montant, durée, périodicité, taux, modalités de remboursement) ?

On peut vouloir ici énoncer les paramètres nécessaires et minimums pour caractériser un emprunt, faire un rappel sur la justification économique du taux d'intérêt (rémunération liée au temps et au risque – de défaut et érosion monétaire)

L'outil proposé peut permettre de montrer, à partir d'un jeu de paramètres donnés (Montant emprunté, taux d'intérêt annuel, durée de l'emprunt, périodicité de remboursement), les échéanciers de remboursement correspondant aux différentes modalités habituellement étudiées.

➔ Simulation à partir de l'outil proposé

3) Que signifie l'expression « échéances constantes ». Illustrez à partir de l'exemple.

Lorsque le remboursement de l'emprunt est effectué par échéances constantes (c'est-à-dire égales entre elles), chaque remboursement comprend :

- l'intérêt calculé sur la fraction vivante (non encore remboursée) de l'emprunt,
- une part affectée à l'amortissement (remboursement) de l'emprunt.

➔ Illustration chiffrée à partir de l'exemple

4) Qu'est-ce que le taux périodique. Comment est-il calculé ?

Types de taux : proportionnel et équivalent, formules de calcul, propriétés et comparaison
La notion de taux actuariel n'est pas abordée.

5) Comment calculer le montant de l'échéance constante (semestrialité) ?

Pour mettre en évidence la formule de calcul de l'échéance constante, on prendra appui sur la notion de suite géométrique et sur la formule de calcul de la somme de n termes d'une suite géométrique.

Il doit y avoir égalité à la date d'emprunt entre le montant V_0 de l'emprunt et la valeur actuelle des annuités versées jusqu'à la fin de l'emprunt au taux i de cet emprunt.

Cette égalité est mise en évidence en utilisant la formule de la somme de n termes d'une suite géométrique. Cependant, il n'est pas simple de « passer » à la « formule magique » permettant le calcul d'une échéance constante de remboursement.

Il peut être utile, à cette occasion, de faire le calcul et de montrer quelques manipulations algébriques (calculs de puissances : puissances entières d'un réel, puissances d'un réel non nul d'exposant entier relatif).

➔ Approfondissement :

6) Les amortissements sont liés par une relation caractéristique. Ils sont en progression géométrique Illustrez par le calcul.

Les amortissements sont en progression géométrique de raison $(1 + i)$
 $A_2 = A_1 (1 + i)$ et $A_3 = A_2 (1 + i)$, soit en généralisant $A_n = A_1 (1 + i)^{n-1}$

➔ Illustration chiffrée à partir de l'exemple

7) Quelle est la dette restant due après le paiement de l'échéance de rang 6 ? Comment obtenir le montant de cette dette lorsqu'on ne dispose pas de l'échéancier ?

Deux solutions peuvent être mises en œuvre pour répondre à cette question :

- 1^{ère} solution : calcul de la somme des amortissements de 1 à 6 puis la soustraire au montant de l'emprunt initial.

- 2^{ème} solution : La somme restant due après le versement de la 6^{ème} annuité est égale à la somme de la valeur actuelle à la fin de la période 6 des annuités restant à verser.

➔ Illustration chiffrée à partir de l'exemple

8) Le montant de l'emprunt et le 1^{er} amortissement sont liés par une relation, laquelle sachant que dans tout emprunt, la somme des amortissements permet de rembourser intégralement le montant emprunté ?

Dans tout emprunt, la somme des amortissements permet de rembourser intégralement le montant emprunté :

$$V_0 = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$$

Par ailleurs, les amortissements sont en progression géométrique de raison $(1 + i)$.

On peut donc utiliser la formule de la somme de n termes d'une progression géométrique et mettre en relation V_0 et le montant du 1^{er} amortissement.

➔ Illustration chiffrée à partir de l'exemple

9) Quelle est la relation entre l'amortissement et l'annuité dans le cas de la 1^{ère} annuité ?

Lors du paiement de la 1^{ère} annuité, il n'y a pas encore eu d'amortissement. La dette est donc égale au montant initial de l'emprunt.

→ Illustration chiffrée à partir de l'exemple

10) Quelle est la relation entre l'amortissement et l'annuité dans le cas de la dernière annuité ?

Lors du paiement de la dernière annuité, l'amortissement éteint complètement la dette restante. On montrera alors que l'amortissement de rang n est égal à l'échéance constante multipliée par $(1+i)^{-1}$.

→ Illustration chiffrée à partir de l'exemple

Remarque méthodologique :

Dans le classeur Excel, version développée, tous les calculs sont effectués par le code VBA et les valeurs sont stockées dans des variables tableaux mises à jour dynamiquement. Il convient d'insister sur la nécessaire logique qui consiste en ce que l'amortissement de la dernière échéance doit épuiser le capital restant à rembourser. De là découle fréquemment un ajustement du montant de la dernière échéance lorsque les calculs sont arrondis à deux décimales. L'application n'effectue pas cette correction.